

准稳态法热物性测试技术应用——Application Note: 003

无量热计式准稳态法热扩散率测试模型的改进



摘要：在无量热计式准稳态法原理模型假设条件的基础上，用更复杂的关系式来对模型进行描述，提出了用三次方关系式来描述试样内部的温度分布，并修正了相应的热扩散率计算公式。经过有限元模拟分析计算，修正后得到的结果误差反而要比修正前更大和更不稳定，这种现象还需进一步的深入研究有待解决，但这种修正方法可以应用到量热计式准稳态热物性测试技术中。

1. 简介

无量热计式准稳态法热物理性能测试技术在测试原理模型中做了很多假设，其中一个最重要的假设是试样在进入准稳态后，试样上所有点的升温速率是一致的。通过采用有限元模拟计算和分析发现，实际情况并不是这样，实际情况是随着温度的升高，试样上所有位置的升温速度逐渐趋近一致。

因此，本文基于这种实际情况与模型假设的偏差，尝试对原有的公式推导进行改进，修正相应的计算公式，希望能进一步的提高测量精度，并通过有限元模拟分析进行验证。

2. 无量热计准稳态法热物性测试基本模型

在无量热计式准稳态法多参数热物理性能测试中，假设被测试样为如图 2-1 所示的一维无限大导热模型：一无限大不良导体平板厚度为 $2R$ ，初始温度为 T_0 ，在平板两侧同时施加均匀的指向中心面的热流密度 q_c ，则平板各处的温度 $T(x, \tau)$ 将随加热时间 τ 而变化。

以试样中心为坐标原点，上述模型的数学描述可表达为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} &= \alpha \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial T(R, \tau)}{\partial x} &= \frac{q_c}{\lambda} \quad \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = 0 \\ T(x, 0) &= T_0 \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

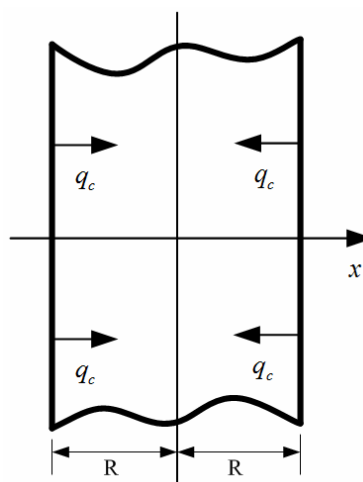


图 2-1 无量热计式准稳态法热扩散率测试基本模型

式中 $\alpha = \lambda / \rho c$ 为热扩散率， λ 为材料的热导率， ρ 为材料的密度， c 为材料的比热， q_c 为从边界向中间施加的热流密度， T_0 为初始温度。

为求解方程(2.1.1)，应先作变量代换，将(2.1.1)式的边界条件换为齐次的，同时使新变量的方程尽量简化，故此设：

$$T(x, \tau) = u(x, \tau) + \frac{\alpha q_c}{\lambda R} \tau + \frac{q_c}{2\lambda R} x^2 \quad (2.1.2)$$

将(2.1.2)式代入(2.1.1)式，得到 $u(x, \tau)$ 满足的方程及边界和初始条件：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} &= \alpha \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u(R, \tau)}{\partial x} &= 0 \quad \frac{\partial u(0, \tau)}{\partial x} = 0 \\ u(x, 0) &= T_0 - \frac{q_c}{2\lambda R} x^2 \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

用分离变量法解方程(2.1.3)，设：

$$u(x, \tau) = X(x) \times F(\tau) \quad (2.1.4)$$

代入(2.1.3)中第 1 个方程后得出变量分离的方程：

$$F'(\tau) + \alpha\beta^2 F(\tau) = 0 \quad (2.1.5)$$

$$X'(x) + \beta^2 X(x) = 0 \quad (2.1.6)$$

(2.1.5)和(2.1.6)式中的 β 为待定常数。

方程(2.1.5)的解为：

$$F(\tau) = e^{-\alpha\beta^2\tau} \quad (2.1.7)$$

方程(2.1.6)的解为：

$$X(x) = c \cos \beta x + c' \sin \beta x \quad (2.1.8)$$

为使(2.1.4)式是方程(2.1.3)的解，(2.1.8)式中的 c 、 c' 和 β 的取值必须使 $X(x)$ 满足方程(2.1.3)的边界条件，即必须 $c'=0$ ， $\beta = n\pi/R$ 。

由此得到 $u(x, \tau)$ 满足边界条件的1组特解：

$$u_n(x, \tau) = c_n \cos \frac{n\pi}{R} x \cdot e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{R^2} \tau} \quad (2.1.9)$$

将所有特解求和，并带入初始条件，得：

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi}{R} x = T_0 - \frac{q_c}{2\lambda R} x^2 \quad (2.1.10)$$

为满足初始条件，令 c_n 为 $T_0 - \frac{q_c}{2\lambda R} x^2$ 的傅氏余弦展开式的系数：

$$c_0 = \frac{1}{R} \int_0^R \left(T_0 - \frac{q_c}{2\lambda R} x^2 \right) dx = T_0 - \frac{q_c R}{6\lambda} \quad (2.1.11)$$

$$c_n = \frac{2}{R} \int_0^R \left(T_0 - \frac{q_c}{2\lambda R} x^2 \right) \cos \frac{n\pi}{R} x dx = (-1)^{n+1} \frac{2q_c R}{\lambda n^2 \pi^2} \quad (2.1.12)$$

将 c_0 和 c_n 的值代入(2.1.9)式，并将所有特解求和，得到满足方程(2.1.3)条件的解为：

$$T(x, \tau) = T_0 + \frac{q_c}{\lambda} \left(\frac{\alpha}{R} \tau + \frac{1}{2R} x^2 - \frac{R}{6} + \frac{2R}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos \frac{n\pi}{R} x \cdot e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{R^2} \tau} \right) \quad (2.1.13)$$

考察 $T(x, \tau)$ 的解析式(2.1.13)可以看到，随加热时间的增加，样品各处的温度将发生变化，而且我们注意到式中的级数求和项由于指数衰减的原因，会随加热时间的增加而逐渐变小，直至所占份额可以忽略不计。

定量分析表明，当 $\frac{\alpha\tau}{R^2} > 0.5$ 以后，上述级数求和项可以忽略。这时式(2.1.13)可简写成：

$$T(x, \tau) = T_0 + \frac{q_c}{\lambda} \left(\frac{\alpha\tau}{R} + \frac{x^2}{2R} - \frac{R}{6} \right) \quad (2.1.14)$$

这时，在试样中心处（ $x=0$ ）有：

$$T(0, \tau) = T_0 + \frac{q_c}{\lambda} \left(\frac{\alpha\tau}{R} - \frac{R}{6} \right) \quad (2.1.15)$$

在试样加热面处（ $x=\pm R$ ）有：

$$T(R, \tau) = T_0 + \frac{q_c}{\lambda} \left(\frac{\alpha\tau}{R} + \frac{R}{3} \right) \quad (2.1.16)$$

由式(2.1.15)和(2.1.16)可见，当加热时间满足条件 $\frac{\alpha\tau}{R^2} > 0.5$ 时，在试样中心面和加热面处温度和加热时间成线性关系，温升速率都为 $\partial T / \partial \tau = \alpha q_c / \lambda R$ ，此值是一个和材料导热性能和实验条件有关的常数，此时加热面和中心间的温度差为：

$$\Delta T = T(R, \tau) - T(0, \tau) = q_c R / 2\lambda \quad (2.1.17)$$

由式(2.1.17)可以看出, 此时加热面和中心面间的温度差 ΔT 和加热时间 τ 没有直接关系, 保持恒定, 系统各处的温度和时间呈线性关系, 温升速率也相同。我们称此种状态为准稳态。

当系统达到准稳态时, 由式(2.1.17)得到:

$$\lambda = T(R, \tau) - T(0, \tau) = \frac{q_c R}{2\Delta T} \quad (2.1.18)$$

根据式(2.1.18), 只要测量进入准稳态后加热面和中心面间的温度差 ΔT , 并由实验条件确定相关参量 q_c 和 R , 则可以得到待测材料的热导率 λ 。

另外, 在进入准稳态后, 由比热的定义和能量守恒关系, 可以得到下列关系式:

$$q_c = c\rho R \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (2.1.19)$$

比热为:

$$c = \frac{q_c}{\rho R \frac{\partial T}{\partial \tau}} \quad (2.1.20)$$

式中 $\frac{\partial T}{\partial \tau}$ 为准稳态条件下试样中心面的温升速率 (进入准稳态后各点的温升速率是相同的)。

依据热扩散率的定义 $\alpha = \lambda / \rho c$, 根据式(2.1.18)和(2.1.19), 就可以得到热扩散率的计算公式:

$$\alpha = \frac{R^2}{2\Delta T} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (2.1.21)$$

从公式(2.1.21)可以看出, 热扩散率的测量是绝对的, 它只取决于距离和时间测量, 并以热扩散率的量纲形式 $[\alpha] = m^2 s^{-1}$ 进行描述。由此, 可以得到准稳态法同时测量热导率、热扩散率和比热容的全部数学公式:

$$\lambda = \frac{q_c R}{2\Delta T}, \quad \alpha = \frac{R^2}{2\Delta T} \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad c = \frac{q_c}{\rho R \frac{\partial T}{\partial \tau}} \quad (2.1.22)$$

由以上分析和公式(2.1.22)可以得到结论: 只要在上述模型中测量出系统进入准稳态后加热面和中心面间的温度差和中心面的温升速率, 就可以测定材料的热扩散率。如果测量出流经试样的热流密度, 就可以得到待测材料的热导率和比热容。

在使用公式(2.1.22)进行实际测试过程中, 在某一温度点时的温度变化速度一般用 $T(x, t) / \Delta t$ 来表示, 这显然认为试样中温度随时间的变化 $T(x, t)$ 近似为一个二次多项式, 试样内的温度变化速度就相当于对这个二次多项式进行求导。

3. 改进后模型

从无量热计式准稳态原理模型中可以看出, 试样内部温度分布公式(2.1.14)对于坐标 x 是一个二次多项式, 为了更加准确的描述试样内的温度变化, 对于试样温度随时间的变化可以用三次多项式来描述, 以替代采用二次多项式来近似表达试样内 ($0 < x < R$) 的一维温度分布 $T(x, t)$, 即:

$$T(x, t) \cong T(0, t) + a(t)x + b(t)x^2 + c(t)x^3 \quad (3.1.1)$$

上式中的三个未知参量 $a(t)$ 、 $b(t)$ 和 $c(t)$ 可以通过以下三个方程获得: 热导率偏微分方程以及试样两个表面的边界条件方程, 即:

$$\text{偏微分方程: } \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2} \quad (3.1.2)$$

$$\text{边界条件 (在试样边界 } x = R \text{): } \frac{\partial T(R, \tau)}{\partial x} = \frac{q_c}{\lambda} \quad (3.1.3)$$

$$\text{边界条件 (在试样中心 } x=0 \text{): } \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = 0 \quad (3.1.4)$$

对微分方程(3.1.1)求 x 的一次导数, 得 $\partial T / \partial x_{x=0} = a(t)$, 把此结果代入方程(3.1.4)中, 得到有关 $a(t)$ 的方程, 即:

$$a(t) = 0 \quad (3.1.5)$$

对微分方程(3.1.1)求 x 的二次导数, 得 $\partial^2 T(x, t) / \partial x^2 = 2b(t) + 6c(t)x$, 将此结果代入方程(3.1.2)。

那么在试样中心处 ($x=0$), 二次求导得:

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial \tau} = \alpha \times 2b(t); \quad b(t) = \frac{1}{2\alpha} \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial \tau} \quad (3.1.6)$$

那么在试样边界处 ($x=R$), 二次求导得:

$$\frac{\partial T(R, \tau)}{\partial \tau} = \alpha \times 2b(t) + \alpha \times 6c(t)R; \quad c(t) = \frac{1}{6\alpha R} \left[\frac{\partial T(R, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial \tau} \right] \quad (3.1.7)$$

把 $a(t)$ 、 $b(t)$ 和 $c(t)$ 代入方程(3.1.1)中, 并用 $x=R$ 来进行评价将会得到一个更加准确的有效热导率表达式, 即:

$$\begin{aligned} T(R, t) &= T(0, t) + a(t)R + b(t)R^2 + c(t)R^3 \\ &= T(0, t) + \frac{R^2}{2\alpha} \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial \tau} + \frac{R^3}{6\alpha R} \left[\frac{\partial T(R, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial \tau} \right] \\ &= T(0, t) + \frac{R^2}{6\alpha} \frac{\partial T(R, \tau)}{\partial \tau} + \frac{R^2}{3\alpha} \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

试样两端的温差为:

$$\begin{aligned} \Delta T(t) &= T(R, t) - T(0, t) = \frac{R^2}{6\alpha} \frac{\partial T(R, \tau)}{\partial \tau} + \frac{R^2}{3\alpha} \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial \tau} \\ \Delta T(t) &= \frac{R^2}{6\alpha} \left[\frac{\partial T(R, \tau)}{\partial \tau} + 2 \times \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial \tau} \right] \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

相应的热扩散率为:

$$\alpha = \frac{R^2}{6\Delta T(t)} \left[\frac{\partial T(R, \tau)}{\partial \tau} + 2 \times \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial \tau} \right] \quad (3.1.10)$$

从上式中可以看出, 如果设定试样内部和试样表面升温速率一样, 则上式就是方程(2.1.22)中旧的热扩散率表达项, 由此可以看出, 修正后的热扩散率计算公式同时考虑了升温 and 降温速率的不同。

4. 有限元模拟计算考核验证

4.1. 有限元模型和参数设置

4.1.1. 有限元模拟分析模型

为了验证此无量热计式准稳态法测试原理模型改进后的计算结果, 设计了两种有限元模拟分析模型, 一种是无量热计模型, 另一个是单试样有量热计模型, 两个模型都采用正方形板状结构, 如图 4-1 所示。

模型的尺寸基本按照常用的防隔热材料被测试样的基本尺寸, 如 $300 \times 300 \times 20\text{mm}$ 正方形板, 由此来保证试样边长和厚度之比大于 10。同时, 为了方便观测和提取有限元分析结果, 将被测试样 $300 \times 300 \times 20\text{mm}$ 的正方形板, 分割成两块相同的 $150 \times 300 \times 20\text{mm}$ 矩形板然后拼接而成, 通过拼接线可以了解温度和热流分布情况。

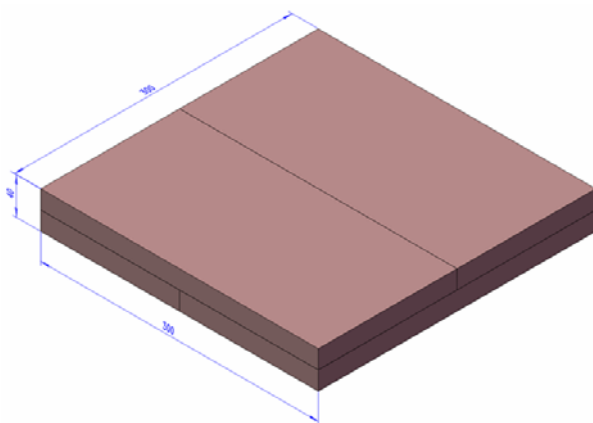


图 4-1 无量热计式准稳态法测试原理有限元模拟分析模型

准稳态法测试原理模型的有限元分析采用动态分析方法，有限元模型中所有部件的初始温度都设置为 20℃，在试样的上下外表面加载按照一定速率变化的温度分别表示试样上下表面温度的线性上升和线性下降。同时，设定试样和量热计四周侧面都为绝热面。有限元网格划分中，设置整体网格大小为 15mm，公差为 0.75mm。

4.1.2. 有限元参数设置

为了便于采用有限元进行模拟计算，根据准稳态法多用于热导率较低的防隔热类材料，假定了三种不同热导率范围的材料作为被测试样，这三种材料的热导率关系是倍数关系，即以如图 4-2 所示的超低热导率 $\lambda(T)$ 材料为基准，其它两种材料的热导率分别是 $4\lambda(T)$ 和 $40\lambda(T)$ ，由此来覆盖各种防隔热类材料的热导率变化范围。由于绝热材料比热容和密度随温度变化不大，所以模拟计算中都采用一组比热容随温度变化数据，如图 4-2 所示，而密度则全部设定为常数，为 300 kg/m^3 。

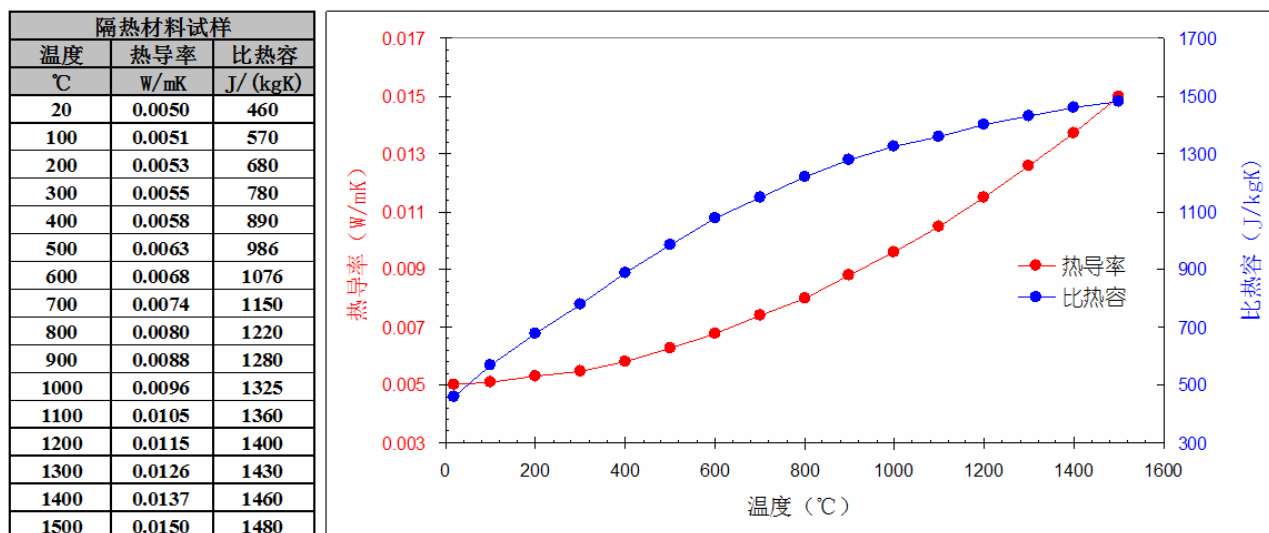


图 4-2 隔热材料试样热导率随温度变化范围

4.2. 有限元计算分析

在具体有限元计算分析中，选用了中低热导率的隔热材料，即上述热导率为 $4\lambda(T)$ 的材料。同时设定升温 and 降温速率相同都为 $2^\circ\text{C}/\text{min}$ ，那么从 20°C 升到 1000°C 用时 29400 秒 (490 分钟)，然后从 1000°C 降温到 20°C 也用时 29400 秒，整个温度升降共用时 58800 秒 (980 分钟)。有限元动态计算时间步距选择为 588 秒，那么总的计算步数为 100 步。通过有限元计算，得到试样外侧温度、试样中心温度、试样平均温度和试样两端温差曲线，如图 4-3 所示。

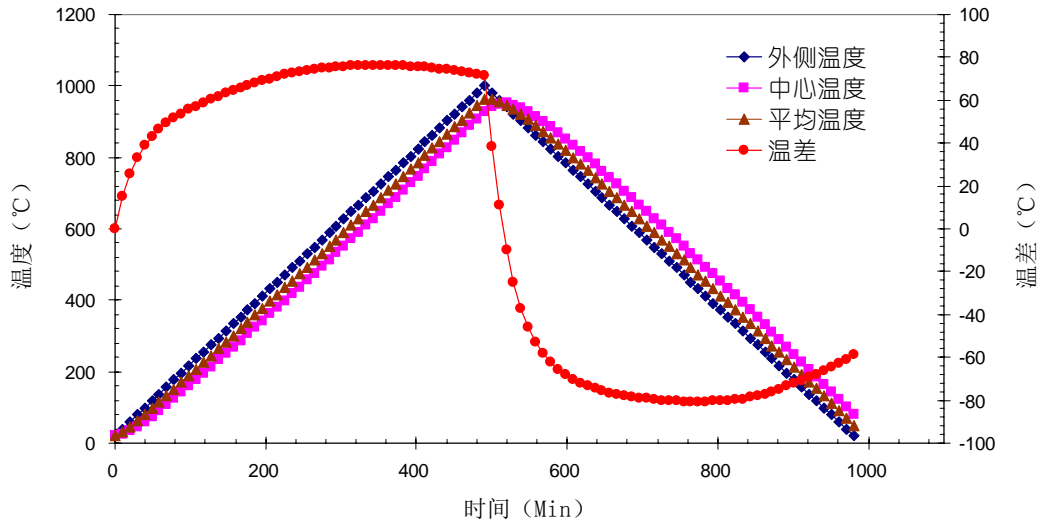


图 4-3 无量热计准稳态法有限元计算得到的试样上各种温度随时间变化曲线

根据图 4-3 所示得到的试样上各种温度曲线，分别采用无量热计准稳态法原理模型修正前后的计算公式进行热扩散率计算，得到的结果如图 4-4 所示。

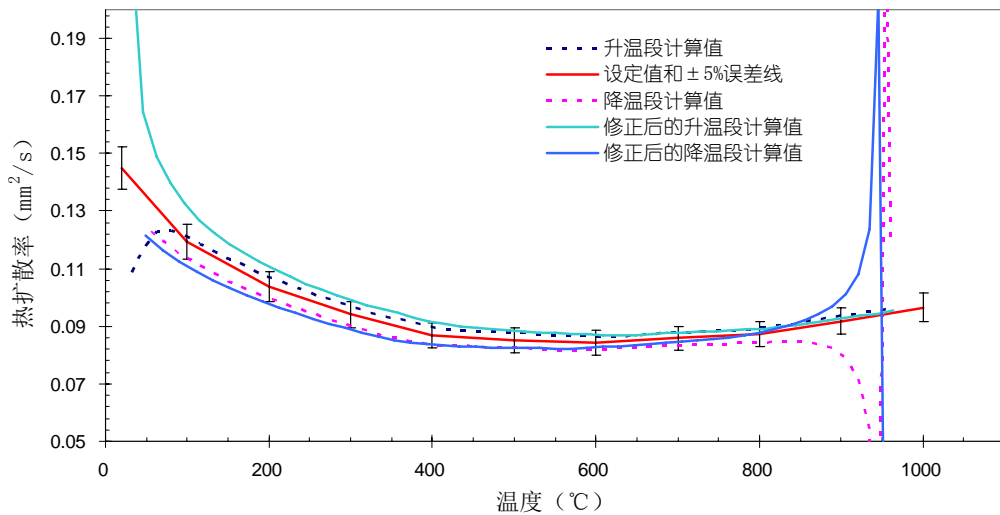


图 4-4 模型修正前后的热扩散率计算结果对比

为了更明显的对比热扩散率计算公式修正前后的效果，将修正前后的热扩散率计算结果与设定值的偏差百分比按照升温段和降温段分别进行对比，如图 4-5 和图 4-6 所示。

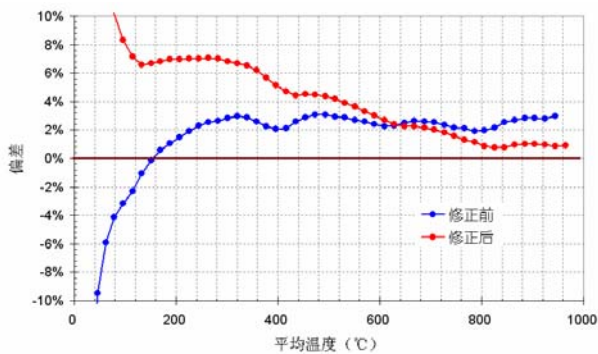


图 4-5 升温段修正前后热扩散率结果偏差对比

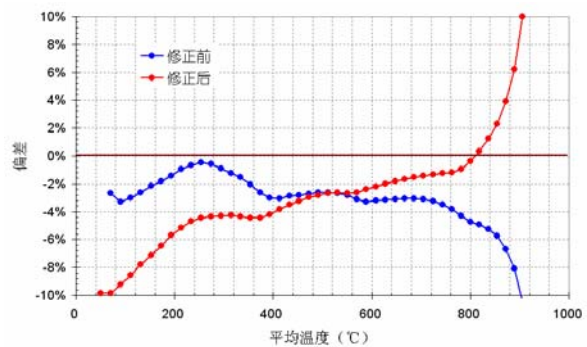


图 4-6 降温段修正前后热扩散率结果偏差对比

从以上有限元计算结果可以看出，采用改进后的热扩散率计算公式所得到的结果与设定值比较，偏差百分比并不稳定，在升温阶段的计算结果中，计算偏差是一条随着温度增加而递减的斜线，在 600℃ 后的计算偏差才比修正前的计算偏差小，而修正前的计算偏差则十分稳定，保持在 3% 以下。

同样，在降温阶段的计算结果中，计算偏差是一条随着温度降低而递减的斜线，但与修正前恰恰相反，温度降的越低计算偏差越大。而在降温段，修正前的计算偏差十分稳定，保持在 4% 以下。

5. 结论

对无量热计式准稳态法原理模型的热扩散率计算公式进行了修正，将描述温差的二次关系式用更能代表实际情况的三次关系式代替，并推导出了新的热扩散率计算公式。

采用新的修正过的热扩散率计算公式，对有限元模拟分析结果进行了计算，但热扩散率计算精度和变化并未改善，反而有比修正前的误差还大，且误差的稳定性也远不如修正前。

但温差的三次方关系式确实更能代表实际温度分布情况，修正公式也能涵盖未修正前的计算公式，从模型原理上完全看不出问题，因此，这种现象还需进一步的深入研究有待解决。

通过以上的修正前和修正后的对比，更能看出采用无量热计式准稳态测试技术，可以通过升温和降温曲线得到全温度范围内误差小于 $\pm 4\%$ 的热扩散率结果，而且整个温度区间数据点多，形成热扩散率结果随温度连续变化，非常便于研究各种相变过程中的热物理性能变化规律。